

2D-Graphik

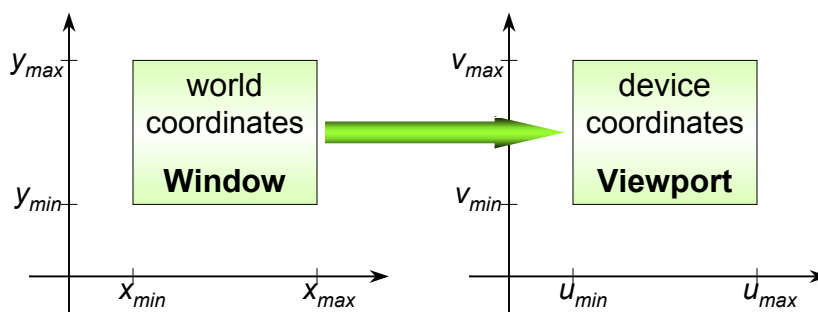
- **Transformationen**
 - Window-Viewport-Transformation
 - Eigenschaften affiner Abbildungen
 - Homogene Koordinaten
- **Clipping**
 - Cohen-Sutherland-Algorithmus: Outcodes, Window-Edge-Koordinaten
 - parametrisches Clipping an konvexen Polygonen
 - Polygon-Clipping

1



Transformationen

- Bisher:
 - Positionen (Linien, Text, ...) in Framebufferkoordinaten
- Besser:
 - Geräteunabhängigkeit & Problemnähe
 - Abbildung von Weltkoordinaten → Gerätekoordinaten



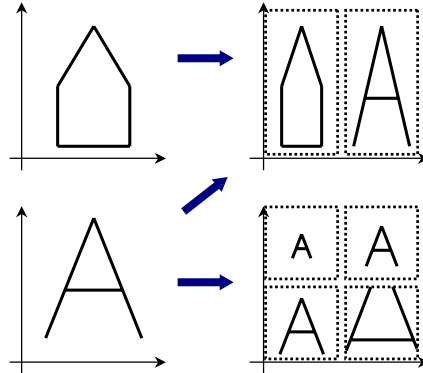
2

– Beachte Höhen-/Seitenverhältnisse !

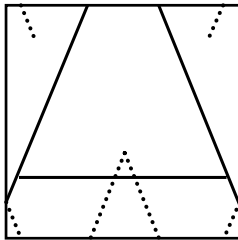


Transformationen

- mehrere Fenster unterschiedliche Objekte / Szenen
- mehrere Ansichten desselben Objekts



- erfordert Clipping

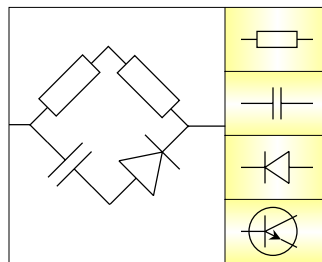


3



In Zeichenprogrammen (CAD)

- Zeichnung aus Segmenten. Platzierung, Drehen, Skalierung



⇒ beliebige affine Transformationen (in 2D)

4



Affine Räume

Euklidischer (affiner) Punktraum: E^2

Punkt (Position): $\underline{a} \in E^2$

Assoziierter Vektorraum: R^2

Vektor (Richtung): $\vec{v} \in R^2$ $\vec{v} = \underline{b} - \underline{a}$ bzw. $\underline{b} = \underline{a} + \vec{v}$

$$\underline{a}, \underline{b} \in E^2 \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{genau ein}} \\ \xleftarrow{\text{viele}} \end{array} \vec{v} \in R^2$$

Koordinatensystem: $(\underline{0}, \vec{e}_x, \vec{e}_y)$ Ursprung: $\underline{0}$

Ortsvektor: $\underline{a} \in E^2$, $\underline{a} - \underline{0} = \vec{a} \in R^2$, $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$

Skalarprodukt: - Länge(\vec{v}) = $|\vec{v}|$ = Abstand($\underline{a}, \underline{b}$)

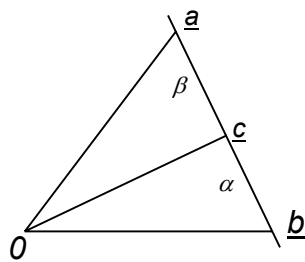
5 - Winkel

Baryzentrische Koordinaten

Affine Kombination: $\underline{b}_0, \dots, \underline{b}_n \in E^2$

$$\underline{b} = \sum_{j=0}^n \alpha_j \underline{b}_j = \underline{b}_0 + \sum_j \alpha_j \underbrace{(\underline{b}_j - \underline{b}_0)}_{\text{Vektor}} \quad \text{mit} \quad \sum_j \alpha_j = 1$$

↑
baryzentrische Koordinaten



$$\underline{c} = \alpha \underline{a} + \beta \underline{b} = \alpha \underline{a} + (1 - \alpha) \underline{b}$$

mit Teilverhältnis $\alpha + \beta = 1$

6

Affine Abbildungen $\phi : E^2 \rightarrow E^2$

- lassen affine Koordinaten unverändert
Invarianten: Teilungsverhältnisse, geradentreu, Parallelität
- lassen sich darstellen durch

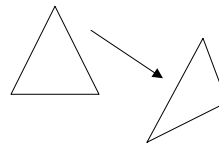
$$\phi(\underline{b}) = A \cdot \underline{b} + \vec{t}$$

$\begin{matrix} \vdots & A & 2 \times 2 \text{ Matrix} \\ \vdots & \underline{b} & \text{Punkt} \\ \vdots & \vec{t} & \text{Verschiebung} \\ & \vec{t} \in R^2 & \end{matrix}$

bijektiv: $|A| \neq 0$

festgelegt durch Bild eines Dreiecks

3x2 Gleichungen für 6 Unbekannte

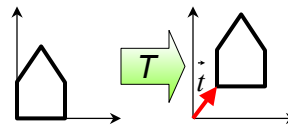


7

Beispiele für Transformationen

- speziell
 - Ähnlichkeitsabbildung
 $|A| = \pm k^2$
– winkeltreu, z.B. Drehstreckung
 - Kongruenzabbildung
 $|A| = \pm 1$
– längen-/flächentreu z.B. Rotation, Spiegelungen
 - Translation

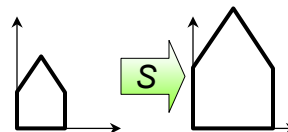
$$P' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_x \\ t_y \end{pmatrix}$$



- Skalierung am Ursprung

$$P' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = S \cdot P$$

$s_x = s_y$ uniforme Skalierung

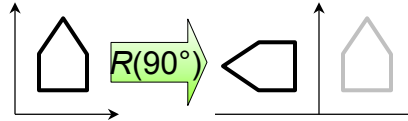


8



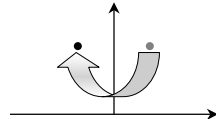
Beispiele für Transformationen

- Rotation von Winkel ϑ um Ursprung



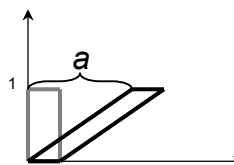
$$P' = \begin{pmatrix} \cos \vartheta & -\sin \vartheta \\ \sin \vartheta & \cos \vartheta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = R \cdot P$$

- Spiegelung an der x-Achse



$$P' = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

- Scherung an der x-Achse



$$P' = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

9



Komposition von Abbildungen

→ Multiplikation der Matrizen

- Ausnahme: Translation $P' = P + T$
- Alle Transformationen haben Fixpunkt

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

→ neue Schreibweise: **homogene Koordinaten**

- weitere Koordinate w , so dass

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ w \end{pmatrix}_{\text{hom}} \hat{=} \begin{pmatrix} x/w \\ y/w \\ w \end{pmatrix}_{2D}$$

- w eigentlich beliebig
- üblicherweise $w = 1$
- sonst Homogenisierung (Division durch w)

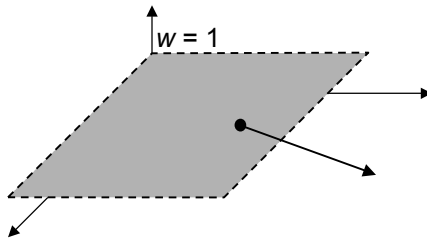
10



Homogene Koordinaten

z.B.
$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -9 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Analogie: " $\frac{2}{1} = \frac{4}{2} = \frac{-6}{-3}$ "



($w = 0$ sind Punkte im Unendlichen)
($0, 0, 0$) ist verboten

11



Homogene Koordinaten

Translation

$$P' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ w' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + t_x \\ y + t_y \\ 1 \end{pmatrix}$$

allgemein affine Abbildungen:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & t_x \\ a_{21} & a_{22} & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad P' = T_2(T_1 \cdot P) = (T_2 \cdot T_1)P$$

- Rotationen durch orthonormale Matrix $R_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} \cos \vartheta & -\sin \vartheta \\ \sin \vartheta & \cos \vartheta \end{pmatrix}$

$$\det(R) = 1 \quad R^{-1} = R^T$$



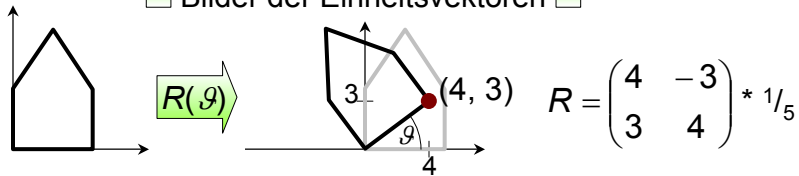
12

Abbildungen

- d.h. Spalten- und Zeilenvektoren sind senkrecht stehende Einheitsvektoren

$$\begin{pmatrix} r_{1x} & r_{1y} \\ r_{2x} & r_{2y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{1x} \\ r_{2x} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} r_{1x} & r_{1y} \\ r_{2x} & r_{2y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{1y} \\ r_{2y} \end{pmatrix}$$

Bilder der Einheitsvektoren

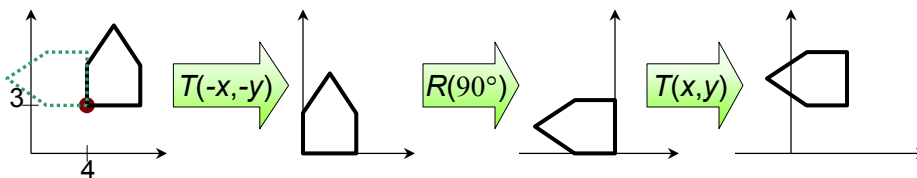


- Drehung um beliebigen Punkt

13



Beispiel: Komposition von Abbildungen



$$P' = T_2(R(T_1 \cdot P)) = (T_2 \cdot R \cdot T_1)P$$

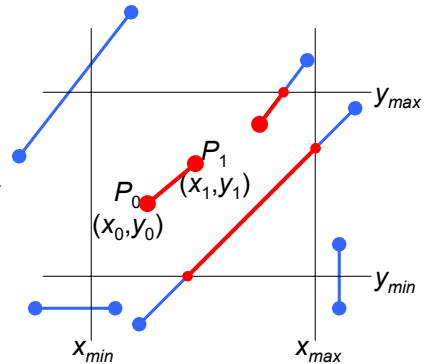
Vorsicht: Im Allgemeinen nicht kommutativ!

14



Clipping von Linien

- an rechteckigen (achsenparallelen) Fenstern
 - Bildraumverfahren:
 - Teste Pixel gegen Fenster (scissoring)
 - evtl. viel Arbeit umsonst
 - Objektraumverfahren
 - analytische Bestimmung der Schnittpunkte (in Weltkoordinaten)



15



Cohen-Sutherland-Verfahren

Outcodes: Bitmaske für jeden Endpunkt

TBRL

1001	1000	1010
0001	0000	0010
0101	0100	0110

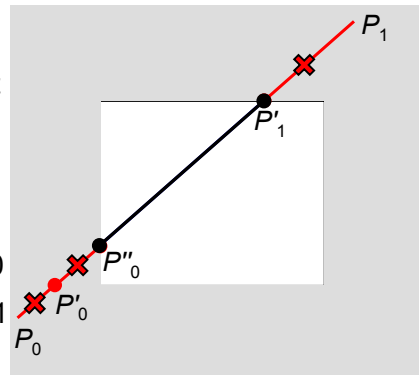
z.B.: $T: y_{\max} - y = \text{WEC}_T(P) \geq 0$ signbit 0

< 0 signbit 1

Window Edge Coordinate

$L: x - x_{\min} = \text{WEC}_L(P)$

- trivial accept: outcode(x_0, y_0) = 0 und outcode(x_1, y_1) = 0
- trivial reject: (outcode(x_0, y_0) AND outcode(x_1, y_1)) \neq 0
- wähle Punkt außen (mit outcode \neq 0)
- teste, ob Schnitt mit TBRL und berechne Schnittpunkt
- entferne äußeres Segment



16



Schnittpunktberechnung: parametrisch

$$P(\alpha) = P_0 + \alpha(P_1 - P_0)$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} x_1 - x_0 \\ y_1 - y_0 \end{pmatrix}$$

Schnitt mit T: $y = y_{\max}$

$$\frac{y_{\max} - y_0}{y_1 - y_0} = \alpha \text{ einsetzen in } x$$

$$\text{bzw. } \alpha = \frac{\text{WEC}_T(P_0)}{\text{WEC}_T(P_0) - \text{WEC}_T(P_1)}$$

17



Linien-Clipping an konvexen Polygonen

- n -Eck mit Kanten E_i und Normalen N_i
 - mathematisch positiv
 - Normalen nach außen
- Schneide $P(t) = P_0 + t(P_1 - P_0)$; $t \in [0,1]$ mit jeder Kante E_i

$(P(t_i) - P_{E_i}) \cdot N_i = 0$
 $t_i \underbrace{(P_1 - P_0)}_D \cdot N_i + (P_0 - P_{E_i}) \cdot N_i = 0$

$(D \cdot N_i = 0) \Rightarrow \overline{P_0 P_1}$ parallel zu E_i

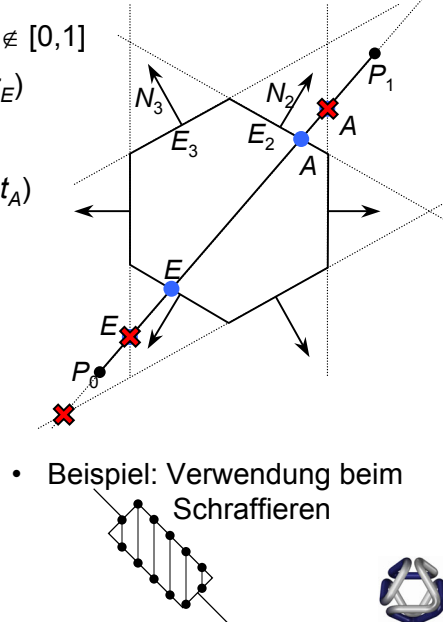
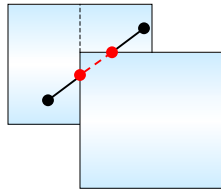
$t_i = \frac{(P_0 - P_{E_i}) \cdot N_i}{-D \cdot N_i} \rightarrow \text{liefert Parameter } t_i \text{ (brauche nur 2 !)}$

18

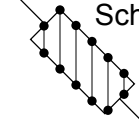


Linien-Clipping an konvexen Polygonen

- entferne äußere Schnittpunkte $t_i \notin [0,1]$
- finde größten der Eintretenden (t_E)
 $D \bullet N_i < 0 \quad (> 90^\circ)$
- und kleinsten der Austretenden (t_A)
 $D \bullet N_i > 0 \quad (< 90^\circ)$
- $t_A < t_E \rightarrow$ nicht sichtbar
- zerteile konkave Polygone in konvexe



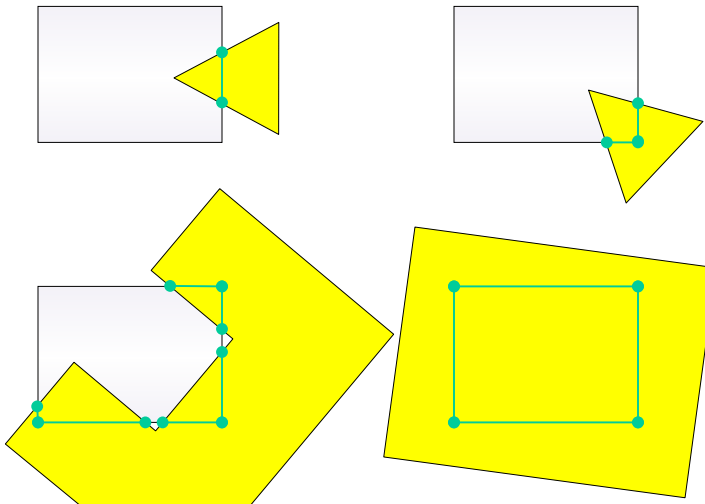
- Beispiel: Verwendung beim Schraffieren



19

Polygon-Clipping

- ist mehr als Line-Clipping

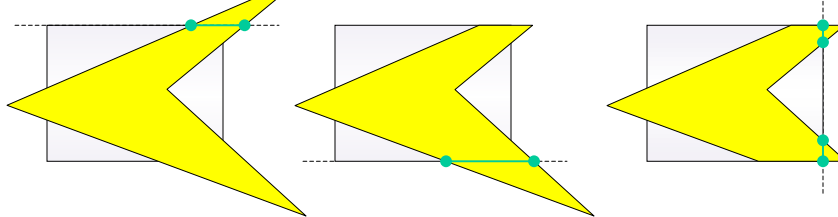
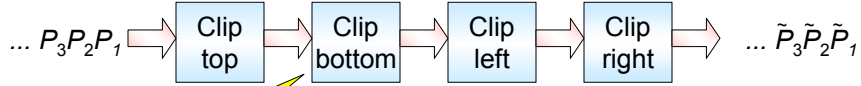


20

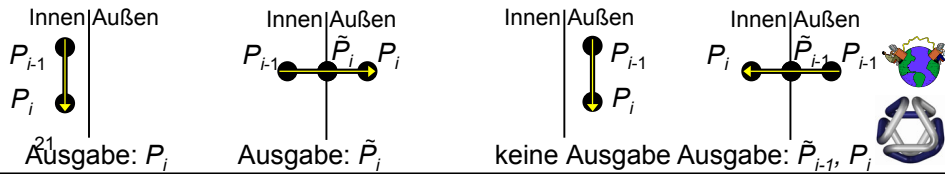


Sutherland-Hodgeman-Algorithmus reentrant polygon clipping

- Prozessiere Vertexliste (P_1, P_2, \dots, P_n) und clippe sukzessive an jeder Clip-Gerade (nicht Strecke!)



- 4 Fälle bei Behandlung eines Vertex P_i



Referenzen

[1] Foley, James; van Dam, Andries; Hughes, John: Computer Graphics, Addison Wesley, 1997